**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Теория графов

Graph Theory

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 051475

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Целями курса являются ознакомление с классическими и современными результатами теории графов и развитие навыков их применения, в том числе в других областях математики, программировании, других науках; формирование у студентов общего представления о методах изучения конечных графов.

Слушатели курса должны овладеть теоретическими основами современных математических представлений и навыками в проведении комбинаторных исследований,   
прежде всего – в рамках теории графов, знать содержание дисциплины "Теория графов" и иметь достаточно полное представление о возможностях её использования в других разделах математики и в приложениях, в особенности – в сфере информационных технологий; иметь представление о структурах теории графов и основных методах доказательства и уметь применять эти методы.

Поставленные цели достигаются путём решения следующих задач курса: изучение основных разделов теории графов; развитие навыков самостоятельного решения практических задач и интерпретации полученных результатов; обеспечение базы для   
использования методов и результатов теории графов в компьютерных программах; повышение математической культуры обучающегося.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен иметь общее среднее образование и предварительную подготовку по основным математическим дисциплинам, изучаемым в 1 семестре.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Уметь демонстрировать и использовать базовые знания теории графов, методы и инструментальные средства исследования объектов профессиональной деятельности, развивать навыки комбинаторного, алгоритмического, логического мышления.

Быть способным развивать и реализовывать математически сложные алгоритмы в современных специализированных программных комплексах в различных прикладных областях науки и техники.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

В качестве основных форм аудиторной работы в рамках курса во втором семестре предполагается проведение лекционных занятий и практических занятий, которые представляют подробное изучение материала по соответствующим темам дисциплины. Построение курса подразумевает постоянное акцентирование внимания обучкющихся на общекультурном, историческом и социальном контексте формирования и использования изучаемых математических понятий и методов теории графов. Предусмотрена также самостоятельная работа с использованием методических материалов: индивидуальная работа с использованием основной и дополнительной литературы к курсу.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 2 | 30 |  |  | 15 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 17 |  | 8 |  | 15 | 2 |
|  | 1-25 |  |  | 1-25 |  |  |  |  | 1-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 30 |  |  | 15 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 17 |  | 8 |  |  | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обученияочная | | | | | | |
| Семестр 2 |  |  | зачёт, устно- письменно | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**Период обучения: Семестр 2**

Раздел 1. Введение в комбинаторику и теорию графов

Раздел 2. Пути и циклы в графе

Эйлеров путь и цикл. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака, метод замыкания, теоремы Хватала. Гамильтонов цикл в кубе связного графа.

Раздел 3. Паросочетания

Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа. Теорема Холла. Теорема Кёнига.

Независимые и доминирующие множества, паросочетания и покрытия в графе: Теорема Галлаи.

Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли. Теорема Татта о совершенном паросочетании. Cовершенные паросочетания в однородном графе. Теорема Томасссена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.

Раздел 4. Раскраски графов

Существование правильной раскраски в k цветов вершин k-редуцируемого графа. Теорема Брукса. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников. Теорема Эрдеша о существовании графа с хроматическим числом и обхватом не меньше данных. Слабая гипотеза Бержа о совершенных графах - теорема Ловаса. Хроматический и покрывающий индексы двудольного графа, теорема Кёнига. Теоремы Визинга и Гупты.

Раздел 5. Связность

Точки сочленения и блоки в связном графе. Дерево блоков и точек сочленения. Алгоритм построения блоков с помощью последовательных разрезов графа по точкам сочленения. Теоремы Менгера и Уитни.

Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные k вершин. Критерий существования гамильтонова цикла через связность.

Раздел 6. Планарные графы

Теорема Эйлера и ее следствия. Теорема Куратовского. Двойственный граф. Триангуляция графа.

Тэйтовы раскраски, эквивалентность Тэйта. Вокруг теоремы о 4 красках. Теорема Томассена о списочной 5-раскрашиваемости планарного графа. Теорема Гринберга о гамильтоновом планарном графе.

Раздел 7. Ориентированные графы и сети

Компоненты сильной связности ориентированного графа. Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе. Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности. Теорема Редеи. Циклы в сильно связных турнирных графах. Теоремы Муна. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе. Теорема Галлаи-Мильграма и теорема Дилворса. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа. Сети и потоки. Теорема Форда-Фалкерсона. Целочисленные сети. Целый максимальный поток в целочисленной сети. Реберная теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона. Максимальный поток в произвольной сети.

Раздел 8. Теория Рамсея и экстремальные задачи

Двумерные числа Рамсея: оценки сверху для случая двух и более цветов. Оценка снизу. Многомерные числа Рамсея: доказательство конечности. Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству. Графы без клики на n вершинах: теорема Турана. Оценка сверху количества рёбер в графе без полного двудольного подграфа. Проективная плоскость над конечным полем и графы без циклов длины 4.

Раздел 9. Некоторые алгебраические инструменты в теории графов

Хроматический многочлен графа. Смысл кратности корней 0 и 1 хроматического многочена. Циклическое пространство графа и пространство разрезов графа, их размерности.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины возможно благодаря посещению лекций, участию в обсуждении рассматриваемых вопросов, самостоятельной работе, включающей в себя чтение рекомендованной литературы. В качестве методического пособия можно использовать Д.В.Карпов. Теория графов. http://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs\_dk.pdf.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Самостоятельная работа студентов в рамках данной дисциплины является важным компонентом обучения. Настоящей программой предусмотрены формы самостоятельной работы с использованием методических материалов по тематике курса и источников, указанных в списках обязательной и дополнительной литературы.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

В течение учебного года по дисциплине проводятся аудиторные контрольные работы, предлагаются задачи и упражнения для самостоятельной работы, проводится зачет. В процессе обучения каждый студент снабжается набором задач, которые необходимо уметь решать для положительной оценки по аттестации.

***Методика проведения зачета***

Зачет проводится в устно-письменной форме. Преподаватели имеют набор контрольных практических и теоретических заданий для проведения зачета. Зачет выставляется по итогам текущего контроля и результатам решения контрольных заданий во время проведения промежуточной аттестации.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы зачета не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и студент удаляется с экзамена.

*Критерии выставления оценок:*

Оценка «**зачтено**» (**A**) ставится за активную работу учащегося на занятиях, полное правильное решение заданий текущего контроля, правильное решение контрольных заданий и тестов во время проведения промежуточной аттестации.

Оценка «**зачтено**» (**B**) ставится за полное правильное решение заданий текущего контроля, правильное решение контрольных заданий и тестов во время проведения промежуточной аттестации.

Оценка» «**зачтено**» (**C**) ставится за полное правильное решение заданий текущего контроля, правильное решение контрольных заданий и тестов во время проведения промежуточной аттестации (возможно, с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «**зачтено**» (**D**) ставится за знание основных определений и методов решения задач по каждой теме курса, решение базовой части (не менее половины) контрольных заданий и тестов во время проведения промежуточной аттестации.

Оценка «**зачтено**» (**E**) ставится за знание основных определений и методов решения задач по каждой теме курса, решение основной части (не менее половины) контрольных заданий и тестов во время проведения промежуточной аттестации (возможно, с исправлением ошибок после наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «**не** **зачтено**» (**F**) ставится в остальных случаях.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный список тем для самостоятельной работы

1. Применения теоремы Холла.
2. Паросочетания и дефицит графа.
3. Правильные раскраски графов с дополнительными условиями.
4. Правильные раскраски гиперграфов.
5. Плоские графы и графы с ограничением на число пересечений.
6. Вычисление хроматических многочленов некоторых видов графов.
7. Циклическое пространство трехсвязного и планарного графов.
8. Циклы в графах большой связности
9. Разделяющие множества в графах большой связности.
10. Дискриминант графа.
11. Связь наибольшей длины цикла в графе с количеством ребер.
12. Барьеры.
13. Восстановление графа: вокруг гипотезы Улама.
14. Теорема Рамсея и ее применение.
15. Экстремальные задачи теории графов

Примерный перечень вопросов для проведения зачета

и контрольных заданий по курсу

1. Дерево.

2. Двудольный граф.

3. Эйлеров путь и цикл в графе.

4. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака.

5. Существование Гамильтонова пути и цикла: метод замыкания.

6. Теоремы Хватала о гамильтоновых последовательностях.

7. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

8. Теорема Холла.

9. Теорема Кёнига.

10. Независимые и доминирующие множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

11. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.

12. Теорема Татта о совершенном паросочетании.

13. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в однородном графе степени 3.

14. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в 2k-регулярном графе.

15. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.

16. Существование правильной раскраски в k цветов вершин k-редуцируемого графа.

17. Теорема Брукса.

18. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.

19. Теорема Эрдеша о графе произвольного обхватат и хроматического числа.

20. Совершенные графы. Слабая гипотеза Бержа - теорема Ловаса.

21. Оптимальные раскраски ребер и их свойства. Реберное хроматическое число двудольного графа.

22. Теорема Визинга.

23. Теорема Гупты.

24. Точки сочленения и блоки в связном графе. Дерево блоков и точек сочленения.

25. Теоремы Гёринга, Менгера и Уитни.

26. Теорема Дирака о цикле в k-связном графе, содержащем заданные k вершин.

27. Критерий существования гамильтонова цикла через связность.

28. Планарные графы. Теорема Эйлера и ее следствия.

29. Теорема Куратовского.

30. Двойственный граф.

31. Триангуляция графа.

32. Тэйтовы раскраски, эквивалентность Тэйта.

33. Теорема Томассена о списочной 5-раскрашиваемости планарного графа.

34. Теорема Гринберга о гамильтоновом планарном графе. Контрпримеры к гипотезе Тэйта.

35. Компоненты сильной связности ориентированного графа, их свойства.

36. Минимальные сильно связные графы. Оценки на число стрелок.

37. Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе.

38. Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности.

39. Циклы в сильно связных турнирных графах. Теоремы Муна.

40. Теорема Редеи о нечетном количестве гамильтоновых путей в турнирном графе.

41. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе.

42. Теорема Галлаи-Мильграма и теорема Дилворса.

43. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях.

44. Ядро орграфа. Критерий раскрашиваемости графа в терминах ядер ориентаций.

45. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа.

46. Сети и потоки. Лемма о разрезе сети.

47. Теорема Форда-Фалкерсона.

48. Целочисленные сети. Целый максимальный поток в целочисленной сети.

49. Реберная теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.

50. Максимальный поток в произвольной сети.

51. Двумерные числа Рамсея: оценки сверху для случая двух и более цветов.

52. Оценка снизу на двумерные числа Рамсея.

53. Многомерные числа Рамсея: доказательство конечности.

54. Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству.

55. Графы без K\_n: теорема Турана, единственность экстремального графа.

56. Проективная плоскость над конечным полем и графы без циклов длины 4.

57. Количество остовных деревьев: теоремы Кэли.

58. Количество листьев в остовном дереве: теорема о промежуточном значении.

59. Хроматический полином графа и его свойства.

60. Кратность корня 0 хроматического многочлена графа.

61. Кратность корня 1 хроматического многочлена графа.

62. Циклическое пространство графа и пространство разрезов графа. Их размерности.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций и проведению практических занятий привлекаются преподаватели, имеющие базовое образование и/или ученую степень, соответствующую профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартно оборудованные компьютерные аудитории для проведения занятий.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел или цветные фломастеры, губки; бумага формата А4, канцелярские товары, картриджи принтеров – в объеме, необходимом для проведения занятий, по заявкам преподавателей.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Карпов Д.В. Теория графов. ЭР открытого доступа в сети Интернет http://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs\_dk.pdf.

2. Харари Ф. Теория графов. - М.: Наука, 1973-2015.

3. Diestel R. Graph Theory. - Springer-Verlag, 2005. ЭР по подписке СПбГУ: https://proxy.library.spbu.ru:4208/book/10.1007/978-3-662-53622-3

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Bondy J.A., U.S.R.Murty. Graph Theory with applications. - North-Holland, New York, 1974. ЭР открытого доступа в сети интернет: http://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1314/BondyMurtyGTWA.pdf

2. Оре О. Теория графов. – М.: Мир, 1968-2009.

3. Берж К. Теория графов и ее применение. – М., 1962.  
  
**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не предусмотрено

**Раздел 4. Разработчики программы**

Карпов Дмитрий Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Кафедра высшей алгебры и теории чисел, d.karpov@spbu.ru.